

KİNEMATİK¹

Teorik Mekaniğin Kinematik, bölümünde cisimlerin hareketi sadece onun geometrisi açısından incelenir. Yani cisme etki eden kuvvetler göz önüne alınmaz.

Burada noktanın gittiği yol, hareketin hızı, ivmesi ve hareket çeşitli yöntemlerle verildiğinde onların tayin olunma yöntemleri öğretilir. Buradaki esas kavramlardan birisi noktanın yörüngesidir. **Yörünge² hesaplama sistemine göre noktanın zaman aralığında onun uzayda belirttiği ardışık durumlarının geometrik yerine denilir. Başka bir deyişle noktanın hareketi izlediği yoldur.**

Noktanın hareketi zamana bağlı olarak öğrenilir. Zaman bağımsız bir değerdir. Kinematikte zaman anı ve zaman aralığı(dilimi, kesimi) gibi kavramlar kullanılır. Zaman anı denildiğinde herhangi bir seçilmiş başlangıç ($t=0$)anından geçen zaman birimlerinin (saniyelerin, dakikaların,...) miktarı, zaman aralığı denildiğinde ise art arda gelen iki zaman anlarının arasındaki fark ($t_2 - t_1$) göz önünde bulundurulur.

Yörünge biçimine göre, noktanın hareketi doğrusal olmayan (eğri biçimli) ve doğrusal ola bilir. Kinematik, nokta kinematiği ve sistem kinematiği olmak üzere iki kısma ayrılır.

§ 1. NOKTA KİNEMATİĞİ

Nokta kinematiğinde noktanın hareketi genellikle aşağıdaki metotlarla verile bilir.

- Doğal (tabii) metot: bu metotla noktanın yörünge üzerindeki hareket denklemi, $s = f(t)$ şeklinde verilir.
- Koordinat metodu: Bu metotla noktanın hareket denklemleri : $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$ şeklinde verilir.
- Vektör metodu: Bu metotla noktanın hareket denklemi: $\vec{r} = \vec{r}(t)$ şeklinde verilir.

§ 1.1. Noktanın hareketinin doğal metotla verilmesi.

Bu metotla noktanın çizdiği yörünge ve onun bu yörünge üzerindeki $S = f(t)$ hareket denklemi verilir. Noktanın hareketi fikse (kayıt) olunmuş hesaplama sistemine göre incelenir.



Şek. 1.1.

¹ **Kinematik** – yunanca «kinema , κίνημα»kelimesinden meydana gelmiş Türkçe anlamı hareket demektir. A.Amper (1775-1836) bu ifadeyi Bilim dalına dâhil etmiştir.

² **Yörünge** – Latince «trajitsire» fiilinden meydana gelmiş Türkçe anlamı atmak demektir.

Verilmiş yörünge üzerinde hesaplama başlangıcı olarak «O» noktası, hareketin artı ve eksi yönleri seçilir. Şekilden görüleceği gibi S – yay koordinatı harekette bulunan M noktasının bu yörünge üzere durumunu tamamen belirleyebilir. Yani $S = f(t)$ hareket denklemi aşikâr görülebilir.

Burada: S – yay koordinatı olarak isimlendirilir.

§ 1.2. Noktanın hareketinin koordinat metodu ile verilmesi

Farz edelim ki, M noktası seçilmiş $Oxyz$ koordinat sistemine nazaran hareket etmektedir. Noktanın çizdiği eğri yani yörünge üzerinde ele alınan herhangi M noktasının durumu bu noktanın x, y ve z koordinatları ile belirtilir.

Noktanın hareketi zamanı onun x, y ve z koordinatları zamana bağlı olarak değişiyor, yani

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t) \quad (1.1)$$

(1.1) denklemleri **Kartezyen Dekart koordinat sisteminde noktanın hareket denklemleri** olarak isimlendirilir. (1.1) denklemleri aynı zamanda noktanın yörüngesinin parametrik biçiminde denklemleridir. Noktanın koordinatlarla yörüngesinin denklemini bulmak için (1.1) denkleminde t parametresini yok edilmesi gerekiyor.

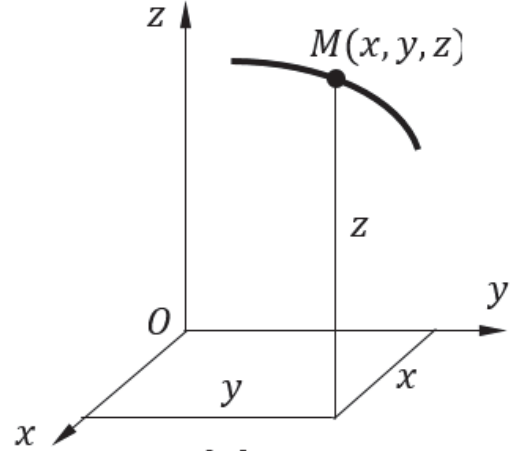
Bazı durumlarda silindirik ve küresel koordinat sisteminin de kullanılması uygundur.

Silindirik koordinatlarda noktanın durumu ρ yarıçapı, φ azimut açısıyla ve z aplikatıyla belirlenir.

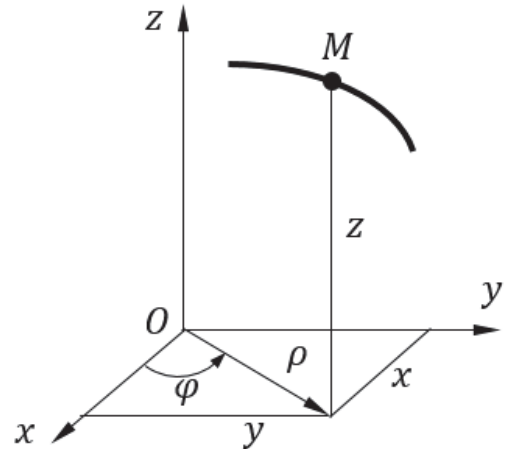
Böylece eğer ρ, φ, z değerlerinin zamana bağlı fonksiyonları biliniyorsa

$$\begin{aligned} \rho &= f_1(t) \\ \varphi &= f_2(t) \\ z &= f_3(t) \end{aligned}$$

Onda noktanın hareket verilmiş sayıla bilir.



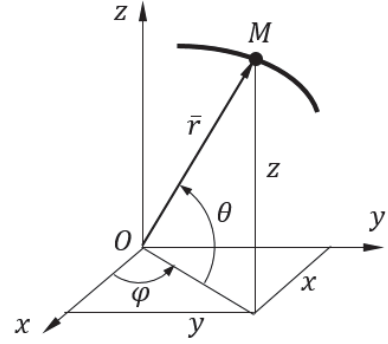
Şekil 1.2



Küresel koordinatlarda noktanın durumu ρ polar yarıçapıyla φ açısıyla ve θ polar açısıyla belirlenir. Noktanın hareketi o zaman verilmiş sayılıyor ki,

$$\begin{aligned} r &= f_1(t) \\ \varphi &= f_2(t) \\ \theta &= f_3(t) \end{aligned}$$

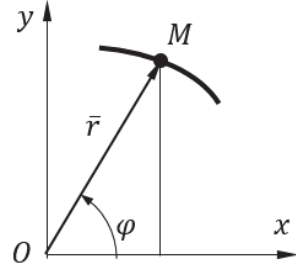
fonksiyonlarının zamana bağlı ifadeleri bilinsin.



Düzlem üzerinde nokta hareket ederken polar koordinatları kullanmak daha uygundur.

$$\begin{aligned} r &= f_1(t) \\ \varphi &= f_2(t) \end{aligned}$$

Koordinat yönteminden doğal yöntemle geçmek için yayın koordinatının diferansiyeli aşağıdaki şekilde bulunur.



$$dS = \pm \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

Burada: $dx = f'_1(t)dt$, $dy = f'_2(t)dt$, $dz = f'_3(t)dt$

Bu zaman ds -in ifadesini böyle yaza bileriz:

$$ds = \pm \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2} \cdot dt$$

Bu ifadeni $0, t$ zaman aralığında (aralığında) integralini alırsız

$$s = \pm \int \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2} \cdot dt$$

Problem: K1. Noktanın hareket denklemleri $x = 9t^3$ ve $y = 12t^3$ şeklinde verilmektedir. Nokta başlangıç durumundan yani harekete geçtiği andan başlayarak, $t=0,3$ s. süresinde gittiği mesafeyi bulunuz.

Çözüm: Verilen hareket denklemlerini diferansiyelini alalım,

$$dx = 27t^2 dt ; \quad dy = 36t^2 dt$$

$t_0 = 0$ ve $t = 0,3$ s zaman aralığında gidilen yolun ifadesinin integralini alırsız,

$$S = \int_{t_0}^t \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \cdot dt = \int_0^{0,3} \sqrt{27 \cdot t^2 + 36 \cdot t^2} \cdot dt = \int_0^{0,3} \sqrt{63} t \cdot dt = 7,94 \int_0^{0,3} t dt$$

Veya

$$S = 7,94 \cdot 0,5t^2 \Big|_0^{0,3} = 7,94 \cdot 0,5 \cdot 0,09 = 0,357m$$

Cevap: S = 0,357m

Problem: K2. Noktanın hareket denklemleri $x = 5\cos 5t^2$ ve $y = 5\sin 5t^2$ şeklinde verilmektedir. Noktanın t zaman süresinde gittiği mesafeyi bulunuz.

Çözüm: Verilen hareket denklemlerini diferansiyelini alalım,

$$dx = -50t \sin 5t^2 dt ; \quad dy = 50t \cos 5t^2 dt$$

$t_0 = 0$ ve $t_1 = t$ zaman aralığında gidilen yolun ifadesinin integralini alırsız,

$$S = \int_{t_0}^t \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \cdot dt = \int_0^{0,3} \sqrt{(-50t \sin 5t^2)^2 + (50t \cos 5t^2)^2} \cdot dt = \int_0^t 50t \cdot dt = 25t^2$$

Veya

$$S = 25t^2$$

Cevap: $S = 25t^2$

Problem: K3. Yörünge üzere noktanın hareket denklemi $s = 2t^3 - 6t$ (m) şeklinde verilmektedir. Bu noktanın $[0; 3]$ zaman aralığında gittiği yolu belirleyiniz.

Çözüm: Görüldüğü gibi noktanın hareket denklemi doğal biçimde verilmiştir. Eğer $s = f(t)$ fonksiyonu monoton fonksiyonduyorsa, $[t_1; t_2]$ aralığında gidilen yol aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır,

$$L = s(t_2) - s(t_1)$$

Eğer fonksiyon baktığımız zaman diliminde monoton değilse, bu zaman onu monoton aralıklara böleriz ve her bir monoton aralığın toplamı gibi ifade ederiz.

Şimdi $s = f(t)$ fonksiyonunu araştıralım. Bunun için bu fonksiyonun diferansiyelini alırız ve onu sıfıra eşitleriz.

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s} = 6t^2 - 6 = 0$$

Bu kare tertipli(kuadratik) denklemin kökleri şöyle olur.

$$t_1 = 1; t_2 = -1$$

İkinci kök $[0; 3]$ aralığının dışında olduğundan fonksiyonun iki monoton aralığı olacaktır ve noktanın $[0; 3]$ zaman aralığında gittiği yol,

$$L_{0,3} = L_{0,1} + L_{1,3} = |s(1) - s(0)| + |s(3) - s(1)| = |2 - 6| + |54 - 18 - 2 + 6| = 44m$$

Cevap: $L_{0,3} = 44m$.

Problem:K4. Hareket denklemleri $x = cht = 0,5(e^t + e^{-t})$ ve $y = sht = 0,5(e^t - e^{-t})$ şeklinde verilmiştir. Bu noktanın yörüngesinin biçimini belirleyiniz.

Çözüm: Verilen parametrik biçimli hareket denklemlerini kare yükseltip taraf tarafa çıkaralım,

$$x^2 = 0,25(e^t + e^{-t})^2 = 0,25(e^{t^2} + 2 + e^{t^2});$$

$$y^2 = 0,25(e^t - e^{-t})^2 = 0,25(e^{t^2} - 2 + e^{t^2})$$

Buradan, $x^2 - y^2 = 1$ elde ederiz.

Bu başlangıç noktası $x = 1$ ve $y = 0$ da yerleşen hiperbolün sağ dalının üst kısmıdır.

Cevap: Hiperbol.

Problem:K5. Noktanın hareket denklemleri koordinat biçiminde $x = a \cdot \sin kt$,

$y = a \cos kt$ ve $z = v \cdot t$ şeklinde verilmiştir. (Burada a, k ve v sabittir). Bu noktanın hareket kanununu ve yörüngesinin denklemini bulunuz.

Çözüm: Koordinat yöntemiyle verilen hareket kanunundan doğal yöntemle geçmek için hareket kanunu aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir.

$$ds = \pm \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

Burada:

$$dx = f_1'(t) dt = \dot{x} = -a \sin(kt); dy = f_2'(t) dt = \dot{y} = a \cos(kt); dz = f_3'(t) dt = \dot{z} = v$$

Bu zaman ds 'in ifadesini böyle yaza bileriz:

$$ds = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2} \cdot dt = \sqrt{[-ak\sin(kt)]^2 + [ak\cos(kt)]^2 + v^2} \cdot dt$$

$$ds = \sqrt{a^2k^2[\sin^2(kt) + \cos^2(kt)] + v^2} \cdot dt = \sqrt{a^2k^2 + v^2} \cdot dt$$

İfadenin integralini alırız.

$$s = \sqrt{a^2k^2 + v^2} \cdot t + C$$

Başlangıç durumda $t = t_0 = 0$; $s = s_0 = 0$ olduğundan, $C = 0$ olur.

$$s = \sqrt{a^2k^2 + v^2} \cdot t$$

Yörüngenin denklemini bulmamız için parametrik şeklinde verilen üçüncü hareket denkleminde $t = z/v$ buluruz ve diğer iki denklemde yerine yazarak noktanın yörüngesinin denklemini elde ederiz.

$$x = a \cdot \sin\left(k \frac{z}{v}\right); y = a \cdot \cos\left(k \frac{z}{v}\right);$$

Cevap: $s = \sqrt{a^2k^2 + v^2} \cdot t$; $x = a \cdot \sin\left(k \frac{z}{v}\right)$; $y = a \cdot \cos\left(k \frac{z}{v}\right)$;

§ 1.3. Noktanın hareketinin vektör yöntemiyle verilmesi

Seçilmiş $Oxyz$ koordinat sistemine nazaran yörünge üzerinde harekette bulunan M noktasının durumu $\vec{r}$ – yer vektörü ile tayin edilebilir.

Noktanın hareket zamanı bu yer vektörünün şiddet ve yönünü değişmektedir.

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad (1.2)$$

(1.2) denklemi **vektör biçiminde** noktanın doğrusal olmayan hareket kanunudur.

Problem:K6. Noktanın hareket denklemleri vektör biçiminde $\vec{r} = 0,3 \cdot t^2 \cdot \vec{i} + 0,1 \cdot t^3 \cdot \vec{j}$ verilmiştir. Bu noktanın yörüngesinin denklemini bulunuz.

Çözüm: Önce bu noktanın hareket denklemlerini parametrik şekilde ifade edelim.

$$x = 0,3 \cdot t^2; \quad y = 0,1 \cdot t^3$$

Bu denklemlerden t parametresini çekerek ikinci denklemde yerine koyalım,

$$y = \sqrt{\frac{x^3}{2,7}}$$

Cevap: Hiperbol.

